

指令跟踪问题的一种数值解法

无锡航空发动机研究所 章霖官

一、调节器问题的离散数值解法

设发动机的离散状态方程为

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k) \quad (1)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} [X^T(k)Q(k)X(k) + U^T(k)R(k)U(k)] \quad (2)$$

其中 $A(k)$ 、 $B(k)$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times m$ 维矩阵序列, $Q(k)$ 为 $n \times n$ 维半正定对角阵, $R(k)$ 为 $m \times m$ 维正定对角阵, $X(k)$ 和 $U(k)$ 分别 n 维和 m 维向量序列。用动态规划来解此调节器问题, 可利用成熟的离散矩阵黎卡提方程递推, 算出系统的最优反馈控制规律, 我们将以此为出发点进行研究。

二、指令跟踪问题的一种数值解法

设离散化后的发动机定常系统的动力学方程和输出方程为

$$X(k+1) = A X(k) + B U(k) \quad (3)$$

$$Y(k) = C X(k) + D U(k) \quad (4)$$

性能指标为
$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [Y^T(k) - \eta(k)]^T Q [Y(k) - \eta(k)] + U^T(k) R(k) \} \quad (5)$$

(5) 式中 $\eta(k)$ 为系统输出 $Y(k)$ 的 l 维指令向量。(3)、(4) 式是典型的指令跟踪问题。

根据一般文献资料介绍, 解决具有形如 (4) 式输出方程的指令跟踪问题一般都较复杂。为使问题得到简化, 我们用下面介绍的方法来求解。

把 (4) 式代入性能指标中的二次函数, 在原来的状态向量中增加一个恒等于 1 的分量 x_{n+1} 而定义一个新的状态向量

$$X(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), x_{n+1}(k)]^T$$

则 (3) 式变为

$$X(k+1) = A_1 X(k) + B_1 U(k) \quad (6)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

经整理后, 性能指标可写成

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ X^T(k) Q_5 X(k) + U^T(k) R_3 U(k) + 2U^T(k) P_5 X(k) \} \quad (7)$$

其中

$$Q_5 = \begin{bmatrix} Q_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} & 0 \\ P_3 & \vdots \\ & 0 \end{bmatrix} - P_4$$

它们分别为 $(n+1) \times (n+1)$ 维和 $m \times (n+1)$ 维矩阵。

(7) 式和调节问题中的 (2) 式比较多了一项混合二次项。已从理论上证明, 线性二次控制问题最优调节规律是状态变量的线性反馈, 可令

$$U(k) = W(k) - R_3^{-1} P_5 X(k), \quad A_5 = A_1 - B_1 R_3^{-1} P_5, \quad Q_6 = Q_5 - P_5^T R_3^{-1} P_5 \quad (8)$$

$W(k)$ 为 m 维向量, A_5 、 Q_6 为 $(n+1) \times (n+1)$ 维矩阵。将 (8) 式代进 (6) 和 (7) 式, 得

$$X(k+1) = A_5 X(k+1) + B_1 W(k) \quad (9)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ X^T(k) Q_6 X(k) + W^T(k) R_3 W(k) \} \quad (10)$$

(9) 和 (10) 式已是标准调节器问题, 采用调节器问题的数值解法就可求出系统的最佳反馈控制规律。令求得的最佳反馈控制为

$$W(k) = -K_5 X(k) \quad (11)$$

K_5 为 $m \times (n+1)$ 维反馈阵, $W(k)$ 中含 $x_1(k)$ 的项表示是跟踪指令值的驱动作用。实际控制量为

$$U(k) = -(K_5 + R_3^{-1} P_5) X(k) \quad (12)$$

在发动机控制中, 为便于驾驶员操作, 驾驶员所给指令值一般是阶跃变化的, 则指令值 η 就是一个常向量。对我们所研究的定常系统来讲, Q_2 、 R 都是常数阵, 则 Q_6 、 R_3 也是常数阵。这样我们可以得到指令跟踪问题最佳反馈阵的稳态值。

到此, 我们就完全解决了形如 (3) ~ (5) 式的指令跟踪问题的数值解法, 解题过程中只进行了简单的矩阵代数变换, 就把复杂的指令跟踪问题归结为简单的调节器问题, 用完且相同的程序来求解

三、在发动机控制系统仿真计算中的应用

发动机在各个设计点附近的小偏差线性模型如 (3) 及 (4) 式所示, 模型中系数矩阵的维数 n 、 m 和 l 分别为 5、4 和 7。本系统有四个独立的控制变量, 我们只能规定前四个输出变量的最终稳态值。本例中指令向量 η 是一个 4×1 向量。系统的性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ EY(k) - \eta(k) \}^T Q_2 EY(k) - \eta(k) \} + U^T(k) R U(k) \quad (13)$$

式中 E 为 4×8 矩阵。前 4×4 组成单位矩阵后三列均为 0

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们把由 (3)、(4) 和 (13) 式组成的最优控制问题用第三节推导的方法求解，编制了通用程序，计算出在各个设计点的发动机模型的最佳反馈阵。以上计算结果被综合到发动机加速过程控制的仿真计算中去。加速过程从最小工况（慢车）设计点开始，到最大工况设计点结束，在它们之间还选择了三个中间设计点。仿真计算框图见图 1。

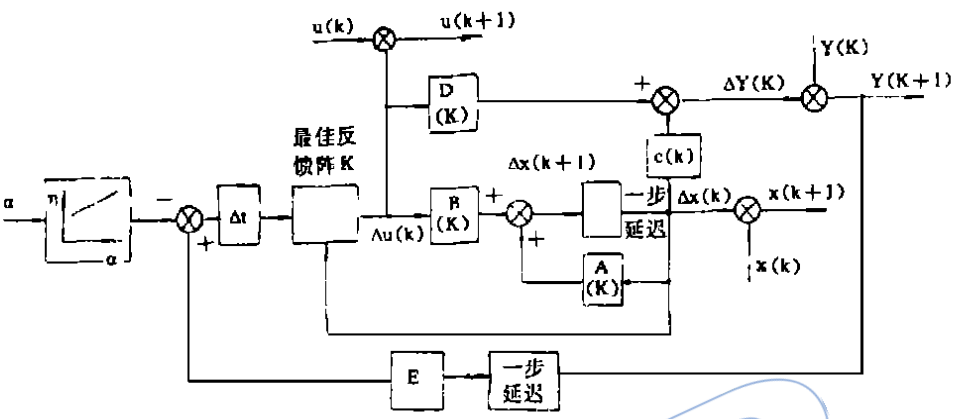


图 1 发动机加速过程控制仿真计算框图

图中省略了对控制量的变化速度及其最大值的限制，积分步长 Δt 定为 0.0025 秒。指令 η 按指定的设计点分阶段给定。发动机在每两设计点之间的状态下的系数矩阵和最佳反馈阵通过插值计算求得。这样就一步一步地在 709 机上算出了发动机加速过程的时间响应。

跟踪指令值的输出分量 $y_1 \sim y_4$ 的时间响应曲线绘于图 2。 y_1 为风扇进口导流叶片位置， y_2 为压气机进口导流叶片位置， y_3 为推力， y_4 是高压涡轮进口温度。图中的数值均为标么值。响应曲线表明输出量很好地跟踪了它们的指令值，在 3.5 秒时它们的误差已分别小于 3×10^{-4} ， 10^{-5} ， 2×10^{-4} 和 10^{-4} ，且在响应速度、超调等性能指标上优于常规控制。

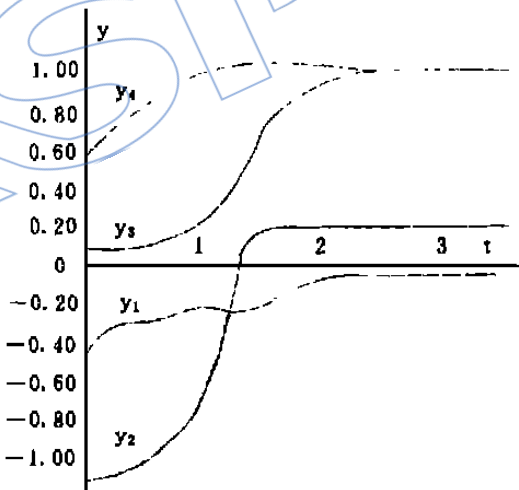


图 2 发动机加速过程导向响应曲线

仿真计算实例表明，本文介绍的指令跟踪问题数值解法可以在发动机多变量控制系统中得到应用。

A NUMERICAL SOLUTION FOR INSTRUCTION TRACING PROBLEM

Zhang Linguan (*Wuxi Aeroengine Research Institute*)

ABSTRACT

This paper describes a simple numerical solution for instruction tracing problem in the engine multivariable control system. In this method the instruction tracing problem turns into the regulator problem to be solved only by simple algebraic transformation, and the optimal feedback control can be obtained with the matrix Riccati equation. Besides, a practical example is presented in which the method is applied in the simulating an aeroengine control system.

DIGITAL ELECTRONIC CONTROL FOR WJ6G4A ENGINE

Tan Fengxiang, Chen Youbin (*Nanhua Powerplant Research Institute*)

ABSTRACT

This paper deals with the technical problems in developing a dual channel electronic control system JYZD-01 for a modified turboshaft aeroengine WJ6G4A which serves as a powerplant of a locomotive. All performance tests and cyclic duration tests of the WJ6G4A engine burning kerosene and heavy fuel have been done under control of the developed system. The measured data meet the design requirements.

因印刷问题第4卷第4期326页文中公式(10)和(11)不全,特此更正如下,

$$(\phi_n)_{i,1} = (\phi_n)_{i,1+1/18} = 2 \frac{5\Delta y_{i,1} - 16\Delta y_{i,2}}{\Delta y_{i,1}\Delta y_{i,2}(\Delta y_{i,1} + \Delta y_{i,2})} \phi_{i,1}^+ + 2 \frac{16\Delta y_{i,2} - 9\Delta y_{i,1}}{\Delta y_{i,1}^2 \Delta y_{i,2}} \phi_{i,1}^+ + 2 \frac{9\Delta y_{i,1} - 12\Delta y_{i,2}}{\Delta y_{i,1}\Delta y_{i,2}(\Delta y_{i,1} + \Delta y_{i,2})} \phi_{i,1}^+ - \frac{8}{\Delta y_{i,1}} (\phi_r)_{i,1} \quad (10)$$

$$(\phi_n)_{i,jN} = (\phi_n)_{i,jN-1/18} = 2 \frac{5\Delta y_{i,jN-1} - 16\Delta y_{i,jN-2}}{\Delta y_{i,jN-1}^2 (\Delta y_{i,jN-2} + \Delta y_{i,jN-1})} \phi_{i,jN}^+ + 2 \frac{16\Delta y_{i,jN-2} - 9\Delta y_{i,jN-1}}{\Delta y_{i,jN-1}^2 \Delta y_{i,jN-2}} \phi_{i,jN-1}^+ + 2 \frac{9\Delta y_{i,jN-1} - 12\Delta y_{i,jN-2}}{\Delta y_{i,jN-1}\Delta y_{i,jN-2}(\Delta y_{i,jN-1} + \Delta y_{i,jN-2})} \phi_{i,jN-2}^+ + \frac{8}{\Delta y_{i,jN-1}} (\phi_r)_{i,jN} \quad (11)$$